**习题三**

【1】设，求向量.其中



【解答】我们有



代入有.

【2】把向量表示成向量的线性组合，其中



【解答】即解线性方程组.我们有



即.

【3】找出下面的四个向量中哪个向量不能由其余三个向量线性表示？



【解答】注意到，故是线性相关的.故无法被表示出来.

【4】设向量组



问：

（1）取何值时，向量是向量的线性组合，并写出时的表达式.

（2）取何值时，向量不能由线性表示.

【解答】（1）注意到的最后一位有数，而三个向量中最后一位也有数的是，故必定只有一个.此时，有

对比系数发现，我们有，故需要满足



且（这是为了避免）.代入，有



（2）或者且.

【5】设有向量组



讨论：（1）为何值时，不能由线性表示？

（2）为何值时，可由线性表示，且表示式唯一？写出该表示式.

（3）为何值时，可由线性表示，但表示式不唯一？并写出所有的表示式.

【解答】（1）

写出矩阵进行化简即可.我们有



发现不能线性表示，只需要，这样会出现无解方程，即无法表示.

（2）时，方程有解，此时可以解出系数



因为此时满秩，故解唯一.得到.

（3）要无穷解，需要秩不满，故，此时可以解出





故得到.

【6】判断下列向量组的线性相关性：

（1）；

（2）；

（3）；

（4）.

【解答】（1）线性相关，注意到有.

（2）线性相关，注意到有.

（3）线性不相关，写出矩阵化简看秩，有



发现秩为，而向量个数也为，故线性无关.

（4）线性不相关，写出矩阵化简看秩，有



发现秩为，而向量个数也为，故线性无关.

【7】讨论下列向量组的线性相关性：

（1）； （2）.

【解答】（1）写出矩阵化简看秩，有



容易发现秩为，无论取何值，秩都为，故线性无关.

（2）写出矩阵化简看秩，有



若，则秩为，此时线性相关；若，则秩为，此时线性无关.

【8】判断以下命题是否正确：

（1）若存在一组全为零的数，使向量组的线性组合



则线性无关；

（2）若存在一组不全为零的数，使向量组的线性组合



则线性无关；

（3）若对任何一组不全为零的数都有



则线性无关；

（4）向量组则中不能由则线性表示，则线性无关；

（5）向量组线性相关，且不能由则线性表示，则线性相关；

（6）向量组中任意两个向量都线性无关，则也线性无关.

【解答】（1）×（2）×（3）√（4）×（5）√（6）×

（1）与定义矛盾，定义是“存在不全为零的数”，且这样得到的是线性相关，不是线性无关，故错误.

（2）与定义矛盾，定义是“使”，且这样得到的是线性相关，不是线性无关，故错误.

（3）正确.因为（3）的意思是只有当均为零时才能使原式成立，即线性无关的定义.

（4）不能由则线性表示与是否相关无关没有关系，因为还要考虑到每一个能否用剩余向量表示.

（5）正确.首先确定线性相关，若线性无关，且不能由则线性表示，则线性无关，与题设矛盾！

（6）任意两个向量线性无关与线性无关没有直接关系，因为可能发生“多个向量的线性组合与另一个向量线性相关”的情况.

【9】设向量组线性无关，指出向量组



的线性关系并说明理由.  
【解答】

若为奇数，则令，有



因为线性无关，故



即有，即线性无关.

若为偶数，则有，存在一组不全为零的系数使得，即线性相关.

【10】设向量线性无关，问满足什么条件时，向量组



也线性无关？

【解答】也线性无关即任意两个向量不能表示出另外一个向量.若可以表示，取表示，必须一定有



而线性无关，即，我们得到.

【11】设向量线性无关，证明向量



也线性无关.

【解答】我们取，因为线性无关，故前系数均为，故有



故只有时，才能满足，即



也线性无关.

【12】证明：向量组线性无关的充要条件是



中任意个向量都线性无关.

【解答】必要性.考虑反证法，若存在一组个向量



线性相关，则存在一组不全为零的系数，使得



故同样存在一组不全为零的系数使得的线性组合为，只需要先取



剩余向量系数全为即可，即线性相关，这与题设矛盾！故假设不成立，即中任意个向量都线性无关.

充分性. 中任意个向量都线性无关.那么取即可，从而原命题得证！

【13】证明：两个维向量线性相关的充要条件是这两个向量的对应分量成比例.

【解答】令.充分性.若，则我们有，此时找到了一组不全为零的数.故二者线性相关.

必要性.若二者线性相关，则存在一组不全为零的数使得



不妨设，故，即对应分量成比例.原命题得证！

【14】设向量组线性无关，证明：向量组



也线性无关.

【解答】类似于题目【11】，取



整理得到



因为向量组线性无关，故



即也线性无关.

【15】设维基本向量组可由维向量组线性表示，证明：线性无关.

【解答】因为任一维向量可由维基本向量组（可以看作基底）线性表示，故可由线性表示.而可由维向量组线性表示，故两个向量组等价.

即.故线性无关.

【16】设是个维向量，证明它们线性无关的充分必要条件是任意一个维向量都可被它们线性表示.

【解答】设维基本向量组，容易证明任意一个维向量都可由其线性表示.

必要性. 线性无关，且都能由线性表示，即



故，两边取行列式，得到



因为线性无关，故.故矩阵



可逆，则.也即都能由线性表示，故任意一个维向量都可由其线性表示.

充分性. 意一个维向量都可被它们线性表示，故可以由



线性表示，故根据【15】的结论，线性无关.从而原命题得证！

【17】设向量组线性无关，而向量组线性相关，且都不能由线性表示.证明：与等价.

【解答】线性相关，即存在不全为零的数使得



因为都不能由线性表示，故.（若其中有一个为零，则另一个向量可以被线性表示；若两个都为零，则线性相关，矛盾）.故容易知道



即可以表示.

且可以表示.

故二者等价，原命题得证！

【18】设向量线性相关，但其中任意个向量都线性无关，证明：必存在个全不为零的数使得



【解答】线性相关，则存在个不全为零的数使得



我们需要证明的是中没有一个数等于.假设存在，则



发现我们找到了个不全为零的数使得



即线性相关，这与题设任意个向量都线性无关矛盾，故不存在，即必存在个**全不为零**的数使得



【19】求下列向量组的极大线性无关组与秩：

（1）；

（2）.

【解答】（1）写出矩阵看秩，有



容易发现秩为，故极大线性无关组为.

（2）写出矩阵看秩，有（变形时不要交换行，否则原向量位置变化了）





容易发现秩为，观察变形后的向量组，可以发现极大线性无关组可以取



【20】求下列向量组的秩及其一个极大线性无关组，并将其余向量用此极大线性无关组线性表示：

（1）；

（2）.

【解答】（1）写出矩阵进行化简有



容易发现秩为，我们取极大线性无关组为即可.容易得到



（2）写出矩阵进行化简有





容易发现秩为，我们取极大线性无关组为，容易得到.

【21】设向量，试用不同的方式验证向量线性相关.

【解答】解法1：容易发现，存在不全为零的常数满足



故三个向量线性相关.

解法2：根据P108页定理3.5，我们发现向量组能够被向量组表示，且，故向量组线性相关.（向量组的替换定理）

【22】设向量组的秩为，证明：其中任意选取个向量所构成的向量组的秩.

【解答】取的一个极大线性无关组，将其扩充为的一个极大线性无关组



因中任意一个元素皆是的线性组合，而



皆不是，故后者皆来自中除了的元素，而除去之后元素只剩下个，故，移项后得到，即

向量组的秩.

【23】设均为矩阵，为矩阵，证明：



【解答】因为的最高阶非零子式总是的非零子式，故，同理可以得到，故.接下来证明不等式右边.

不妨设，将和分别作列变换化为列阶梯形，则中分别有个和个非零列.所以中有个非零列，故.

又因为，行、列变换不改变秩，故，从而得到了



从而不等式得证！

【24】用基础解系表示出下列方程组的全部解：

（1）； （2）；

（3）； （4）；

（5）.

【解答】（1）写出矩阵，变形，有





故得到通解为，其中.

（2）写出矩阵，变形，有



故得到通解为



其中.

（3）写出矩阵，变形，有



发现第一行第二行解出的结果不同，故原方程无解.

（4）写出矩阵，变形，有



故我们得到一组特解为，得到通解为



其中.

（5）写出矩阵，变形，有



故容易得到特解为，得到通解为



其中.

【25】已知矩阵的各个列向量都是齐次线性方程组



的解向量，问这四个解向量能否构成方程组的基础解系？是多了还是少了？多了如何去掉？少了如何补充？

【解答】写出矩阵，变形，有



故容易得到通解为



对比上面的矩阵，发现需要去掉第二列第四列，补充.

【26】已知齐次线性方程组



又已知齐次线性方程组的通解

，为任意常数

（1）求齐次线性方程组的基础解系；

（2）线性方程组与方程组是否有公共非零解？若有，求出所有公共非零解；若没有，则说明理由.

【解答】（1）写出矩阵，有



故容易得到基础解系为.

（2）即考虑基础解系的线性组合能否相等，我们有



得到方程组为，写出矩阵，有



可以得到，故可以得到公共非零解为.

【27】取何值时，下列方程组无解？有唯一解？或有无穷多解？在有无穷多解时，求出其全部解.

（1）； （2）.

【解答】（1）详见习题一【8】（3），下面答案为照抄，题目为



我们写出矩阵以及其变换后结果如下：

当时





若，方程有无穷多解，解为.

若时，方程解为



当时，，发现方程组无解.

综上所述：

（i）时无解；

（ii）时方程有无穷多解，解为；

（iii）时，方程解为.

按照习题要求，写成基础解系的话，无穷多解的通解为



（2）写出矩阵，有



发现时无解，因为此时会出现无解方程.

时有无穷多解，解为.

时有无穷多解，解为.

【28】当取何值时，下列线性方程组无解？有唯一解？或有无穷多解？在有解时，求出其所有解.

（1）； （2）.

【解答】（1）写出矩阵，变形，有



显然时无解.若，此时有



此时，若，方程无解；若时有唯一解，解为



若时有无穷多解，此时变为



可以得到通解.

（2）写出矩阵，变形，有



发现矩阵的秩与的值有关.

若，此时秩最多为，方程只能有无穷多解或者无解，矩阵继续变形，得到



故若，方程无解；若时，方程有无穷解，通解为



若，则方程有唯一解，解为.

【29】设线性方程组



（1）证明：若常数互不相等，则此线性方程组无解.

（2）若，且



是该线性方程组的两个解，试写出此线性方程组的通解.

【解答】（1）写出增广矩阵的行列式，有



若常数互不相等，则此时行列式不为零，容易得到.

而系数矩阵的任意三阶子式都是Vandermonde行列式，且都不为零，故.

故，所以方程组无解.

（2）容易得到通解为



【30】判断以下命题是否正确：

（1）若是方程组的基础解系，则与等价的向量组也为此方程组的基础解系；

（2）若是矩阵，当时，方程组必有无穷多解；

（3）设是矩阵，，则方程组必有唯一解；

（4）设是矩阵，，则方程组必有解；

（5）设是矩阵，则方程组必有解；

（6）若方程组只有零解，则方程组必有唯一解.

【解答】（1）×（2）×（3）×（4）√（5）√（6）×

（1）显然错，基础解系的一个等价向量组虽然也都是其解，但它所含的向量个数可以大于基础解系向量个数，因而它就不一定是解向量组的极大无关组.

（2）显然错，也可能无解.

（3）显然错，也可能无解.

（4）对，行满秩方程组必有解.

（5）对，注意到，故



所以方程组必有解.

（6）显然错，也可能无解.

【31】设是阶方阵，试证若对于任意一个维向量都有，则.

【解答】因为线性方程组的基础解系中含有个线性无关的解向量，故秩，即.

【32】设齐次线性方程组



的行列式，其中，而中某元素的代数余子式.证明：是该齐次线性方程组的一个基础解系.

【解答】因为行列式，故，将



按列分块，，其中，则



即，表明是齐次方程组的解.

又因为，，即存在一个阶的非零子式，故.

因此，方程组的基础解系只包含有个向量，任意一个非零向量解都可作为的基础解系；由知，因此



是该齐次线性方程组的一个基础解系.原命题得证！

【33】证明：非齐次线性方程组



对任意常数都有解的充分必要条件是其系数矩阵的行列式不为零.

【解答】充分性.若行列式不为零，根据Cramer法则可知对任意常数方程都有解.

必要性.根据已知，任一维向量都可以由的列向量组线性表示，故维基本向量组也可由的列向量组线性表示.故的列向量组与等价，故，则此时显然有.

【34】设是非齐次线性方程组的一个解，是其对应的齐次线性方程组的一个基础解系，证明：

（1）线性无关；

（2）线性无关；

（3）方程组的任一个解都可以表示成



其中，.

【解答】（1）设有一组数使得，两边同时乘以矩阵，得到



又因为，且，得到，可以得到.

此时变为



而是齐次线性方程组的一个基础解系，故其线性无关，即



从而得到若需要成立，则，也即线性无关.

（2）同理，设有一组数使得，两边同时乘以矩阵，得到



又因为，且，得到，故



根据（1）我们知道线性无关，故，故可以解出，从而我们知线性无关.

（3）为的一个解（此处取，否则二者相减得到的是零向量），故我们有，可以得到，发现方程变为了的形式，故根据基础解系的性质，我们一定有



为了满足的系数，必须有，从而我们证明了任意一个解向量都可以表示为的形式，其中，.事实上，此处都是可以任取的，约束条件



实际上是为了约束，若的和较大或者较小，都可以通过来调整.

而若，取即可.

【35】设为阶方阵，是维非零列向量，是非齐次线性方程组的解，是对应的齐次线性方程组的解.

（1）若，证明：线性无关.

（2）若的秩，证明：线性相关.

【解答】（1）若线性相关，则存在不全为零的满足



不妨设，则此时得到.那么，因为是维非零列向量，所以可以得到，带回有，与题设矛盾！故原假设不成立，则线性无关.

（2）若，则显然线性相关.若，容易知道，且



故也是方程的解.因为，故齐次线性方程组的基础解系可以为（基础解系向量个数为，故唯一的解必定可以作为基础解系），从而与线性相关，即存在数使得.故



即线性相关.

【36】设是个互不相同的数，且.证明：向量组线性无关，其中



【解答】将每个的前个分量组成新的向量组



计算，容易发现这是一个Vandermonde行列式，其值为



故线性无关，而又是的截短向量，故也线性无关.

【37】设向量组线性相关，，则必存在自然数使是的线性组合.

【解答】向量组线性相关，即存在不全为零的数满足



而且不全为零，如若不然，则，而，此时得到，发现全为零，与题设不符合.因此存在使得



于是



即是的线性组合.

【38】设，且可由线性表示，则向量组与向量组等价.

【解答】我们只需要证明可由线性表示即可.

不妨设是的极大无关组，是的极大无关组（二者秩相同，故极大无关组所含向量数相同）.考虑向量组



可由表示出，则，而又有



故可由表示出，也即可由线性表示，从而我们证明了向量组与向量组等价.

【39】设向量组线性无关，向量组线性相关，则中至少有一个向量可由向量



线性表示.

【解答】因为线性相关，故有不全为零的，使得.容易证明.如若不然，则，此时



因为向量组线性无关，故此时，与题设不全为零矛盾！故.而又因为，故必定存在，若不存在



则，与上面的条件矛盾！故此时我们找到了一个，其可以表示为



即中至少有一个向量可由向量



线性表示.命题得证！

【40】证明：矩阵的列向量组线性无关的充分必要条件是：当时，必有，这里是矩阵.

【解答】将矩阵进行分块，得到

必要性.按照分块，我们有



发现得到的的列向量均为矩阵列向量的线性组合，而这些线性组合的结果均为，同时，矩阵的列向量组线性无关，则这些线性组合的线性系数必须全部为，即中所有元素均为零，故.必要性得证！

接下来证明充分性. 考虑反证法，若当时，必有，而的列向量组线性相关，那么此时一定存在不全为零的系数满足



可以用这组系数去替换矩阵中的任意一列，同样可以得到，而此时，与题设矛盾！故矩阵的列向量必不可能线性相关，故矩阵的列向量组线性无关.从而原命题得证！

【41】设矩阵的秩为，证明：存在秩为的阶矩阵，使



【解答】根据题设容易知道方程有个线性无关的解向量构成的基础解系.再补上个零向量即可构成阶矩阵，且有.同时容易知道



【42】设的矩阵的秩为，，证明：齐次线性方程组的任意个线性无关的解向量都是它的一个基础解系.

【证明】考虑反证法.若有个线性无关的解向量不是的基础解系，由基础解系的定义知，至少有一个解向量不能由线性表示，因此线性无关，若需要表示这些线性无关的解，至少需要所含数目大于等于的向量组（基础解系），这与的基础解系含个向量矛盾！故原假设不成立.

附：要证明一组向量为齐次线性方程组的基础解系时，必须满足以下三条：（1）这组向量是该方程组的解；（2）这组向量必须是线性无关组，即基础解系各向量线性无关；（3）方程组的任意解均可由基础解系线性表出，即方程组的所有解都可以用基础解系的量来表示。另外，这组向量所含向量的个数为.

【43】设是实矩阵，证明：

（1）与是同解方程组；

（2）.

【解答】（1）若是的解，即，显然我们有，即是方程的解.反之，若是方程的解，那么我们有



从而有，即，从而



于是，即是的解，从而）与是同解方程组.

（2）二者同解，故二者解空间维数相同，而解空间维数又等于未知数个数减去系数矩阵的秩，故.而我们知道，故容易知道



【44】设是矩阵，是矩阵.证明：方程组与同解的充分必要条件是.

【解答】先证明必要性.设，则的基础解系中有个解向量，又因为方程组与同解，故线性方程组的基础解系中也包含了个解向量，故，即.

接下来证明充分性.若，则线性方程组与的基础解系中所包含的解向量个数相同.又发现的所有解都是的解，所以的一个基础解系也是的基础解系，即与同解.

【45】设为阶方阵，且（称为**幂等矩阵**）.证明：



【解答】，故的每一列都是方程组的解向量.而中的列向量未必构成解空间的基，故



实际上，这是显然的，中的列向量的极大无关组所含向量的数量必然小于等于，最多的情况就是基础解系的情况.

又有，从而我们有



故夹逼得到.

【46】设为阶方阵，且（称为**对合矩阵**）.证明：



【解答】，故（和上一题类似，将看成一个矩阵即可）.

同时我们有，从而夹逼得到.证明和上一题是类似的.

【47】设为矩阵，为矩阵.证明：方程组有解的充要条件是的任一解向量都是的解向量.

【解答】先证明必要性.有解，不妨设这个解为，则此时有



而对于方程来说，对于其解向量我们有，从而有



从而我们证明了的任一解向量都是的解向量.必要性得证.

接下来证明充分性. 的任一解向量都是的解向量，故方程组

与方程组同解.故，从而有



即我们证明了方程组有解（增广矩阵与系数矩阵同秩）.原命题得证！

【48】设为阶矩阵，且，证明：



【解答】当可逆时，我们有，故有.从而得到



从而我们得到.

而当不可逆时，显然有，故，也即为零矩阵，故



显然也是成立的，因为此时有.故原命题得证！

其中用到了结论.

【49】设为阶矩阵，证明：.

【解答】证明与同解即可.事实上，显然的解都是的解，下面证明的解都是的解.假若不然，假设存在满足而（此处暗含了的信息），**则个元向量**



**线性无关**（因为若这些向量线性相关，则



依次乘以，容易得到，而这与线性相关矛盾），而这是不可能的，因为维向量最多只能有个向量线性无关（这是由向量空间决定的），故矛盾！原假设不成立，必须有，从而我们证明了的解都是的解.故原命题得证！

下面提供一种更加妙的证明方法.

另解：显然，.

因此在这个矩阵中，必有某使得，从而方程组与方程组同解，从而方程组与方程组同解，以此类推可以得到.该证明运用了容斥原理，较为巧妙.